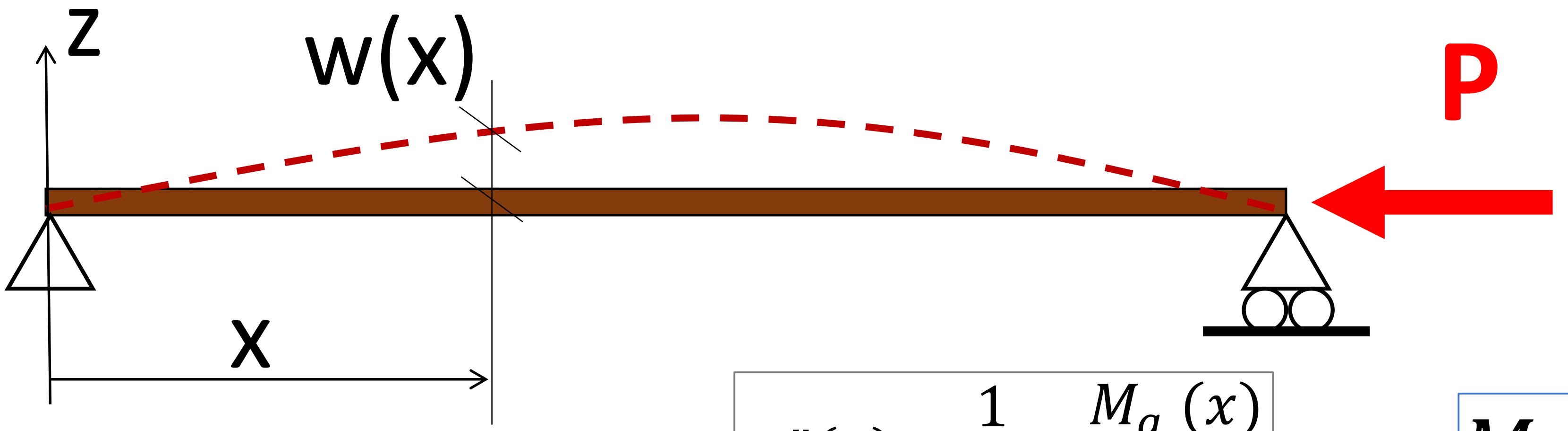
Wykład 14A

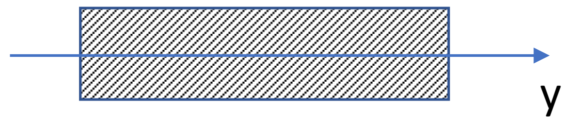
Wyboczenie pręta

(Utrata stateczności)

Wyboczenie pręta idealnego

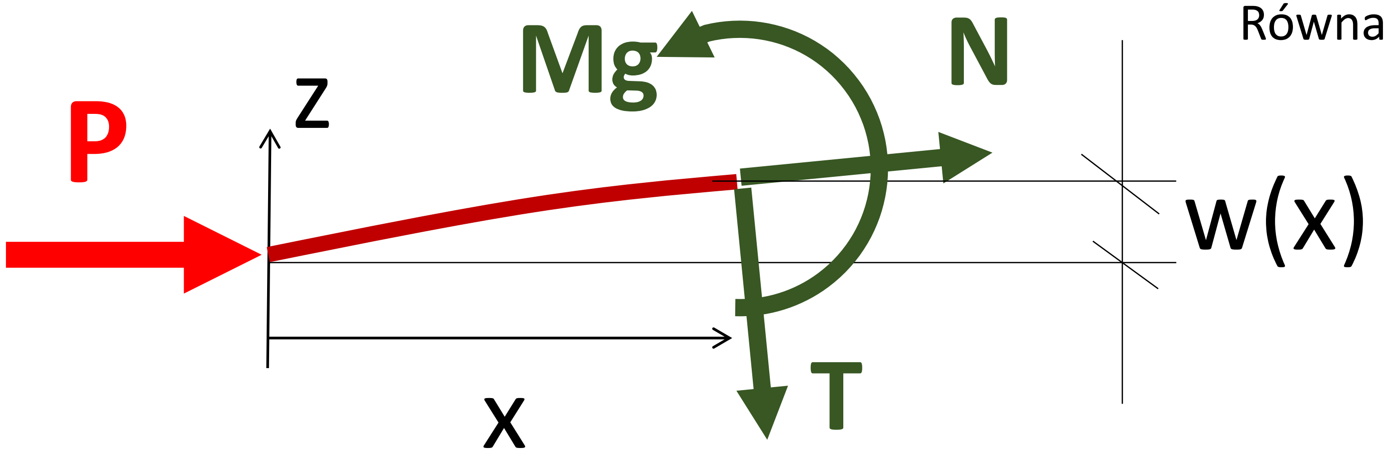
Ściskany smukły pręt idealnie prosty może utracić stateczność *(znaleźć nową postać równowagi)*





$$w''(x) \cong \frac{1}{\rho} = \frac{M_g\ (x)}{E\,J_y}$$

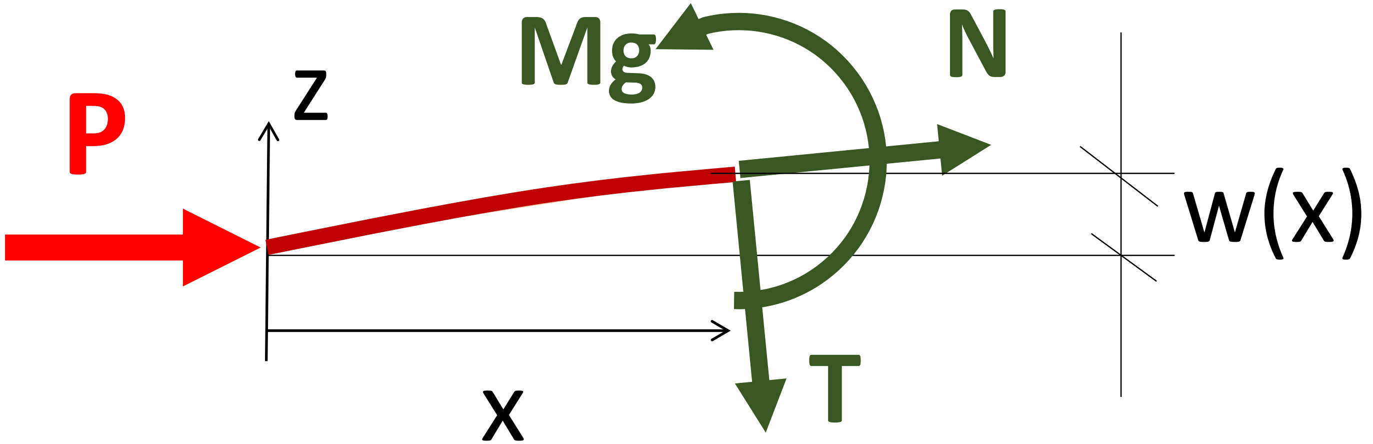
$$\boxed{M_g\ (x) = E\ J_y\ w''(x)}$$



Równanie równowagi momentów wzgl. pkt. przecięcia:

$$M_g\ (x) + P\ w(x) = 0$$

$$\boxed{E\ J_y\ w''(x) + P\ w(x) = 0}$$



$$E\,J_y\, w''(x) + P\, w(x) = 0$$

$$w''(x) + \frac{P}{E\,J_y}\, w(x) = 0$$

Podstawmy: $k^2 = \dfrac{P}{E\,J_y}$ Wtedy: $$w''(x) + k^2\, w(x) = 0$$

(Równanie różniczkowe jednorodne)

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jednorodnego: $w(x) = A \sin kx + B \cos kx$

Warunki brzegowe:

$w(0)=0 \rightarrow A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \rightarrow B=0$

$w(l)=0 \rightarrow A \sin kl = 0 \rightarrow kl = \pi, 2\pi, \ldots, n\pi \rightarrow k^2 = \dfrac{\pi^2}{l^2}, 4\dfrac{\pi^2}{l^2}, \ldots, n^2\dfrac{\pi^2}{l^2}$

Obciążenie krytyczne

$$k^2 = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E\,J}_y}$$

oraz

$$k^2 = \frac{\pi^2}{l^2}, 4\frac{\pi^2}{l^2}, \dots, n^2\frac{\pi^2}{l^2}$$

$$\mathrm{P}_{kr} = k^2\,\mathrm{E\,J}_y$$

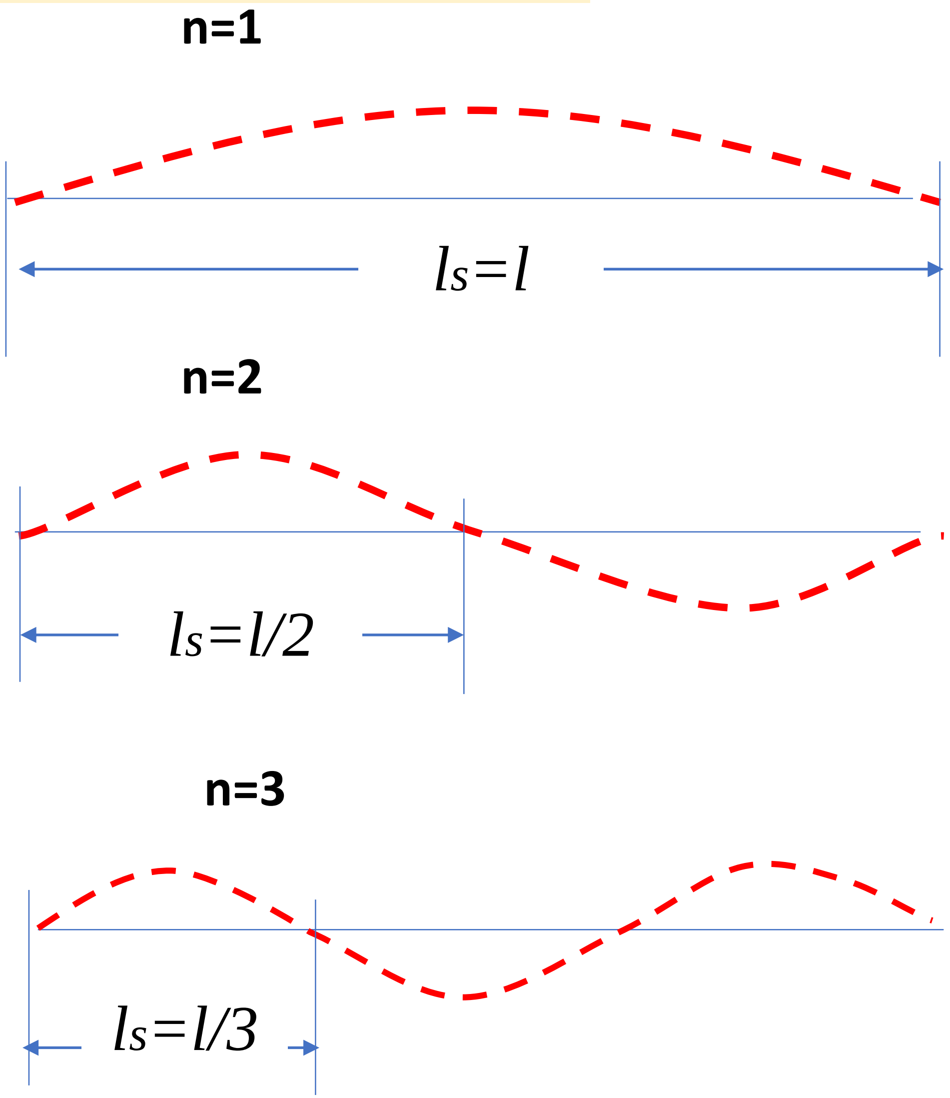
$$\mathrm{P}_{kr} = \frac{\pi^2\mathrm{E\,J}_y}{\left({}^{l}/_{n}\right)^2}$$

$$l_s = {}^{l}/_{n}$$ - długość swobodna *(długość półfali)*

Wzór Eulera: $$\mathrm{P}_{kr} = \frac{\pi^2\mathrm{E\,J}_{min}}{l_s^2}$$

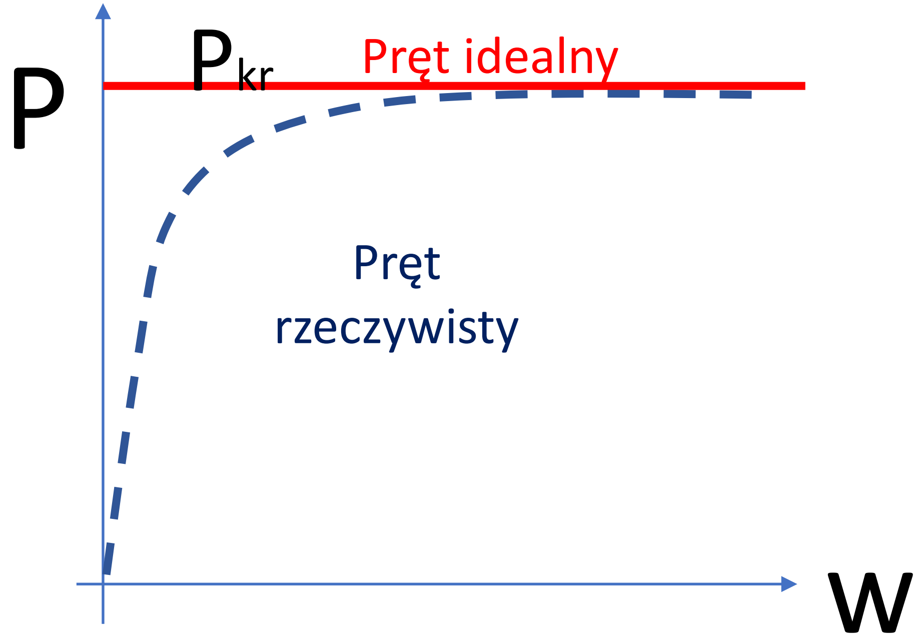
Obciążenie krytyczne

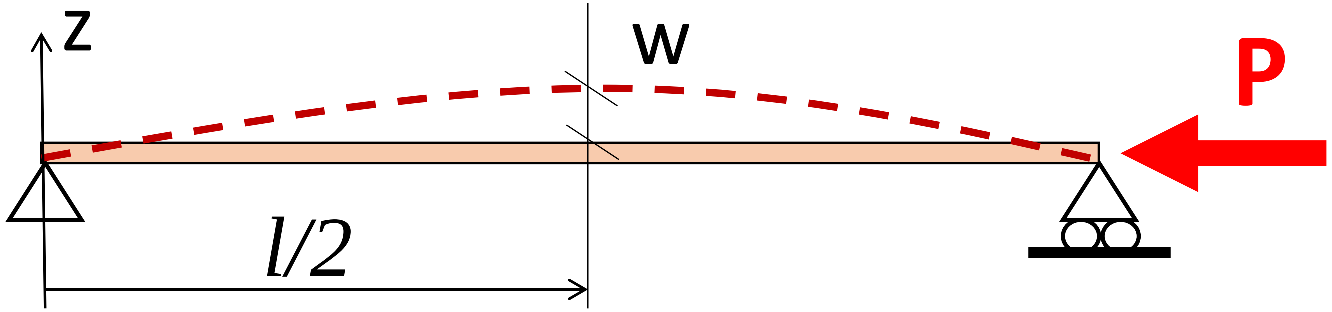
Interesuje nas zawsze najniższa wartość siły krytycznej !



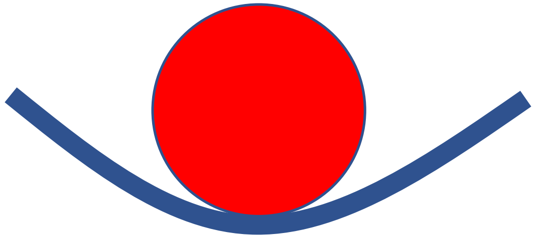
Postaci utraty stateczności:

Wyboczenie pręta rzeczywistego



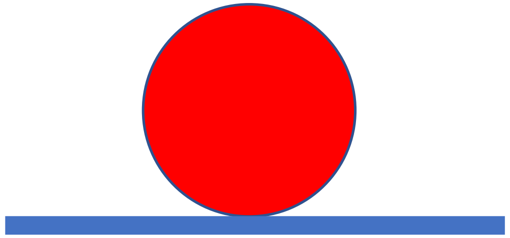


Interpretacja energetyczna siły krytycznej



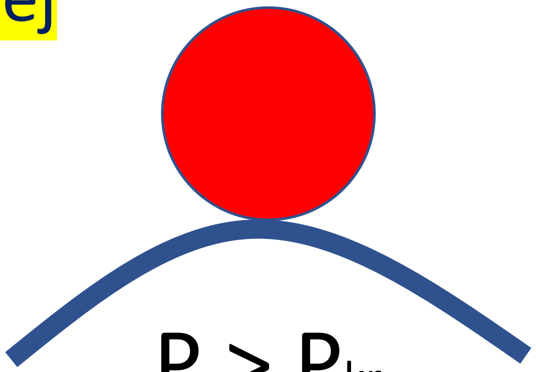
$P < P_{kr}$

Równowaga trwała



$P = P_{kr}$

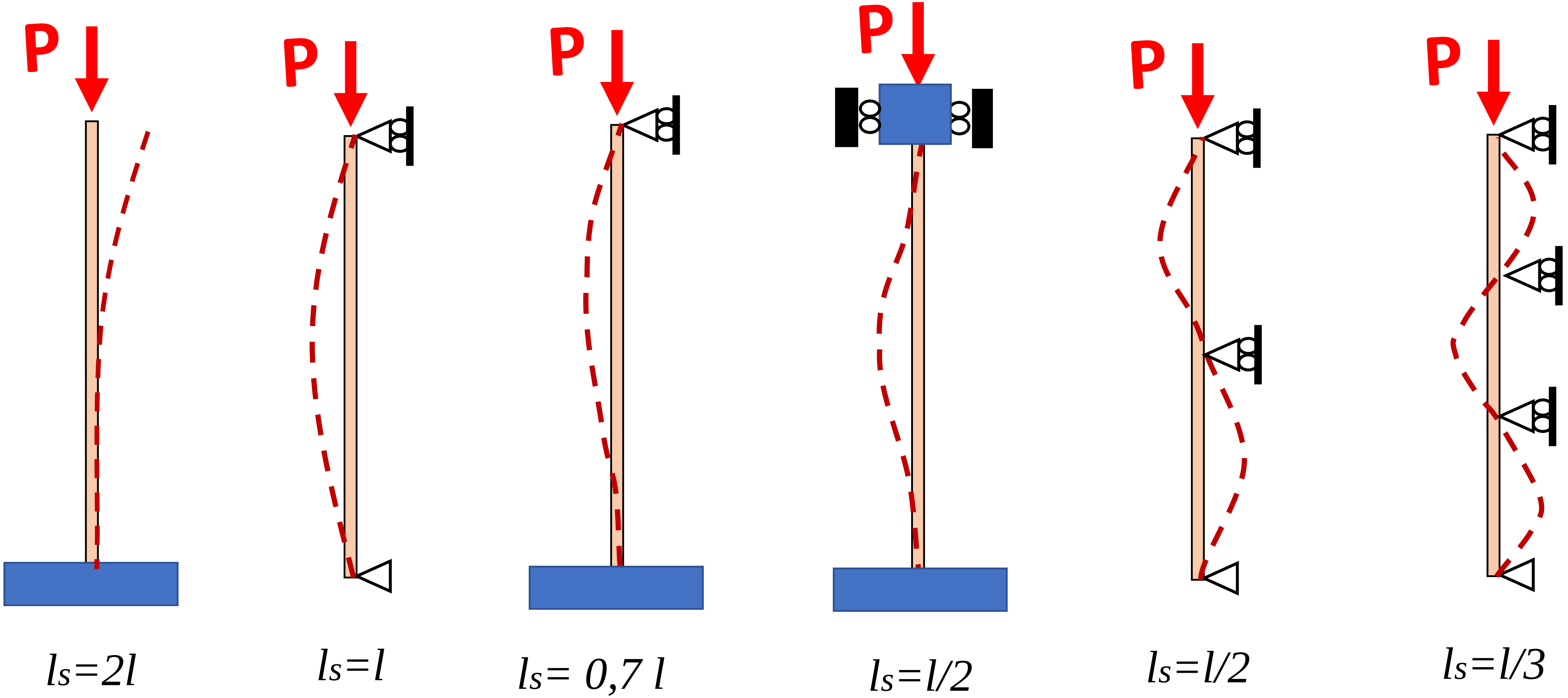
Równowaga obojętna



$P > P_{kr}$

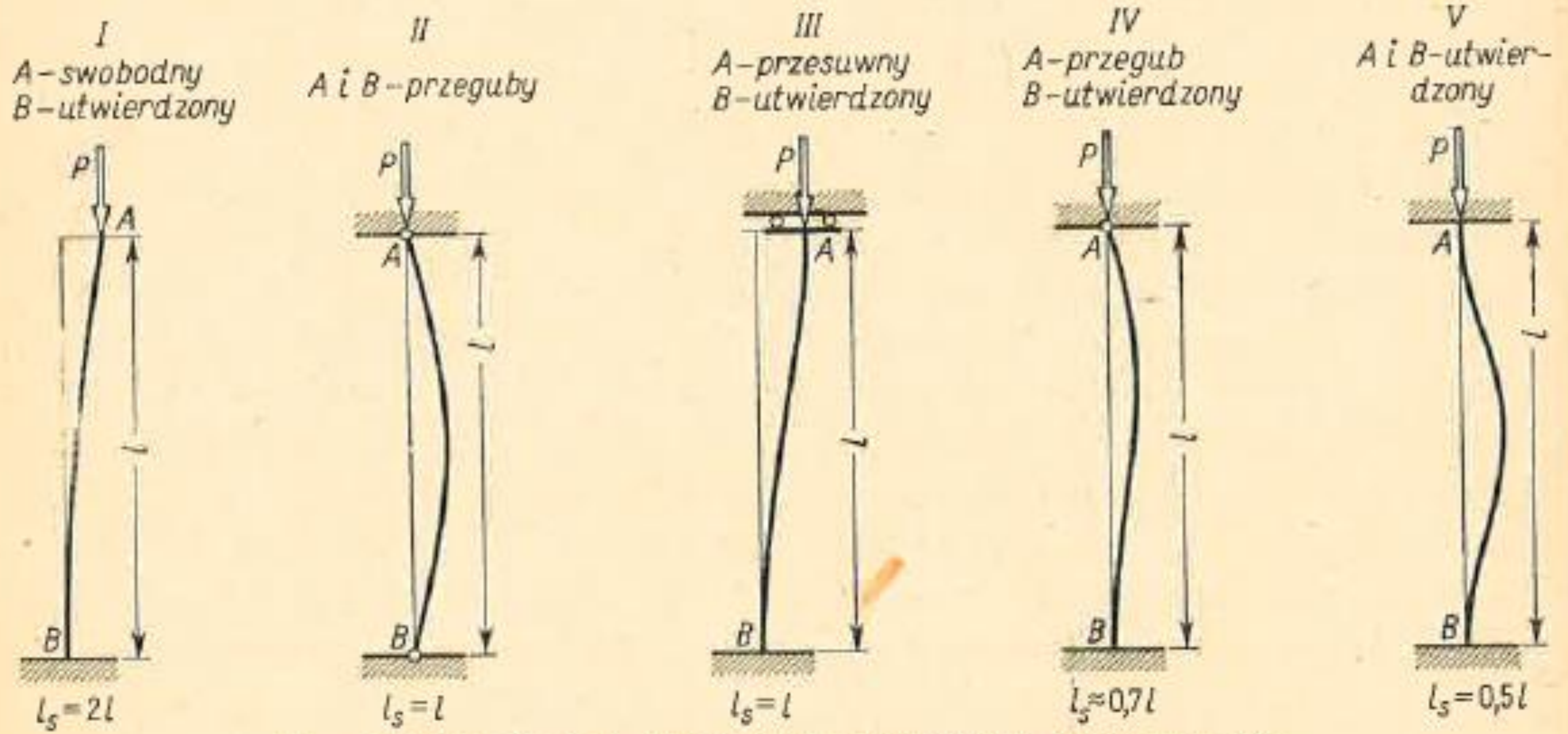
Równowaga chwiejna

Typowe przypadki wyboczenia sprężystego



l_s - długość swobodna = *długość półfali* *(intuicja inżynierska!)*

Typowe przypadki wyboczenia sprężystego



Rys. 6.24. Określenie l_s w typowych przypadkach podparcia pręta

Naprężenia krytyczne

Wzór Eulera:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E\, J_{min}}{l_s^2}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 E \left(\frac{J_{min}}{A}\right)}{l_s^2}$$

$$\boxed{\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{max}^2}}$$

smukłości

$$\lambda_y = \frac{l_{s\_y}}{\sqrt{\frac{J_y}{A}}} = \frac{l_{s\_y}}{i_y}$$

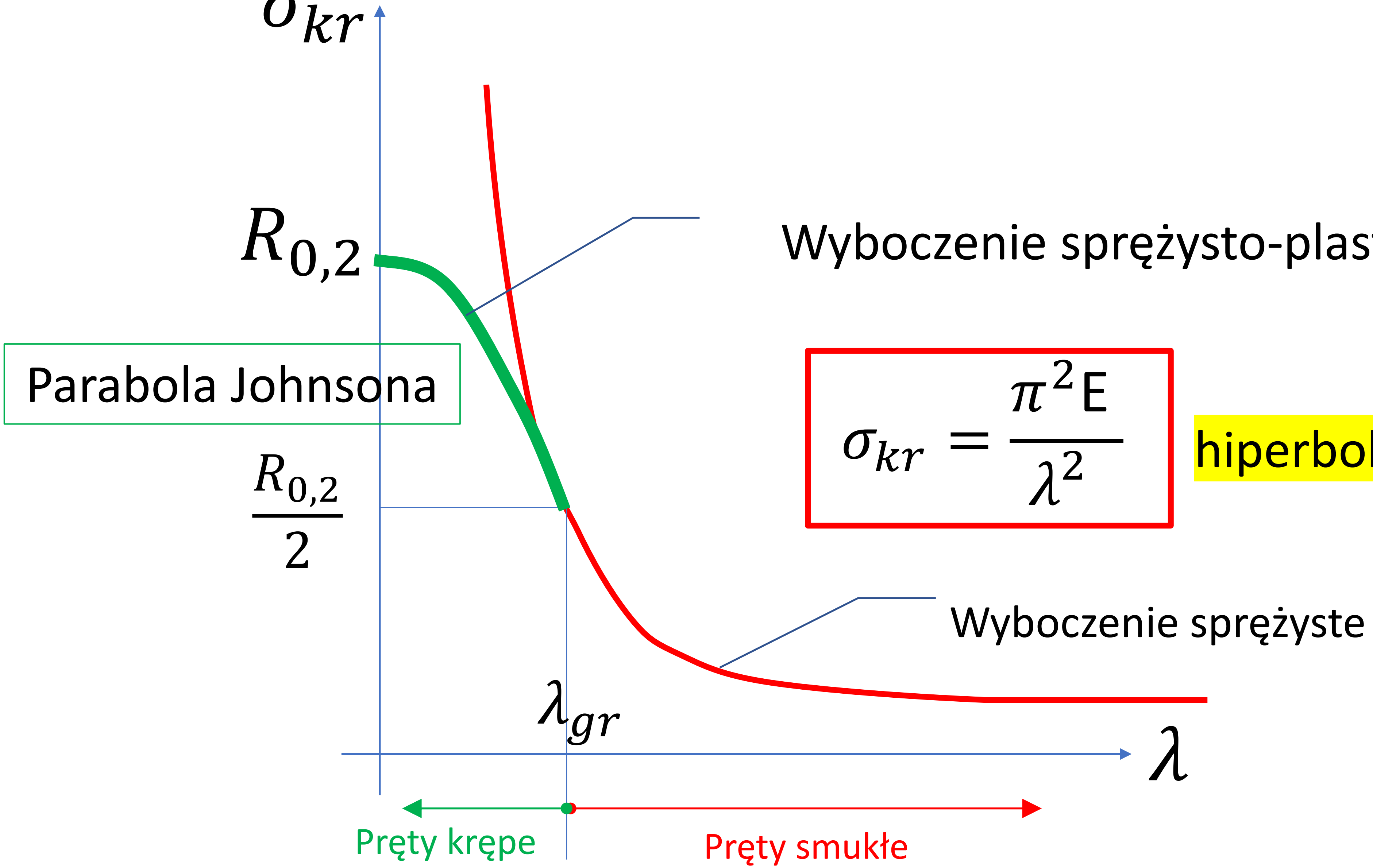
$$\lambda_z = \frac{l_{s\_z}}{\sqrt{\frac{J_z}{A}}} = \frac{l_{s\_z}}{i_z}$$

Promienie bezwładności

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$$

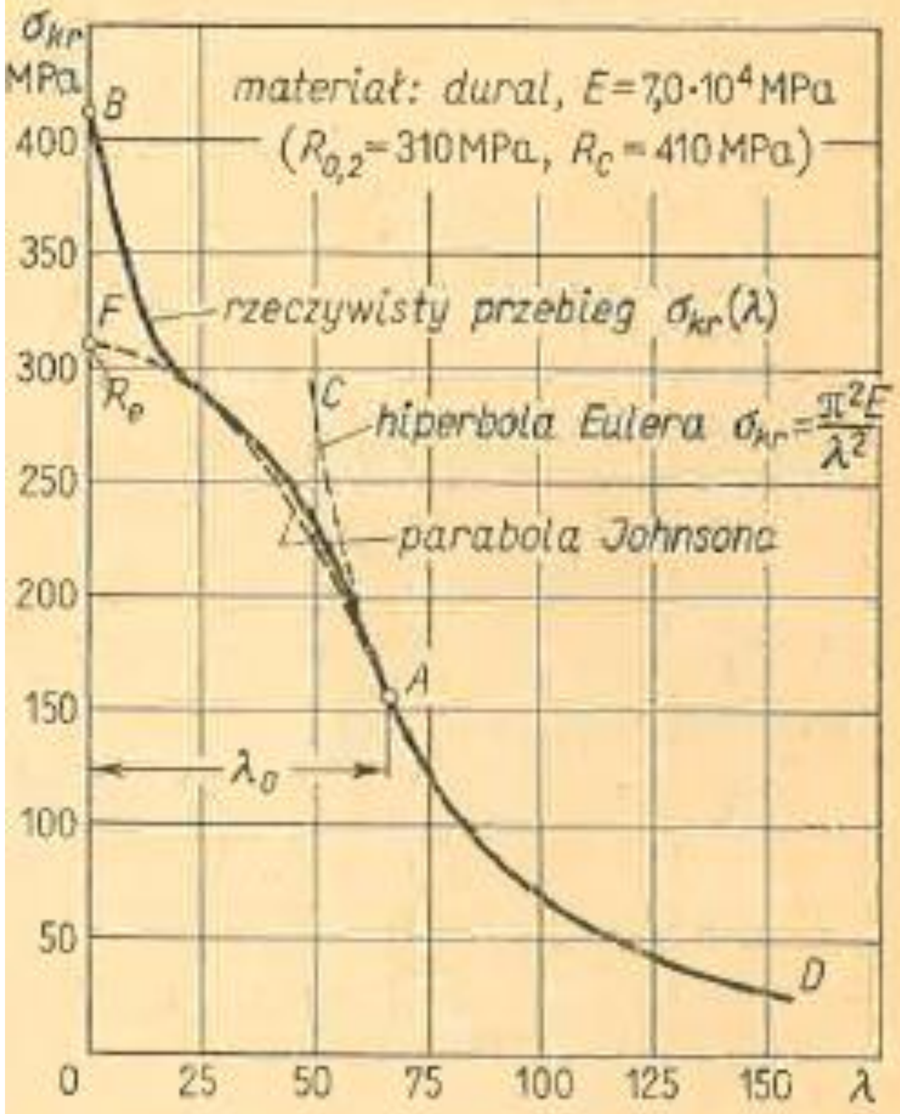
Dla materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności



$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

hiperbola Eulera

Dla materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności

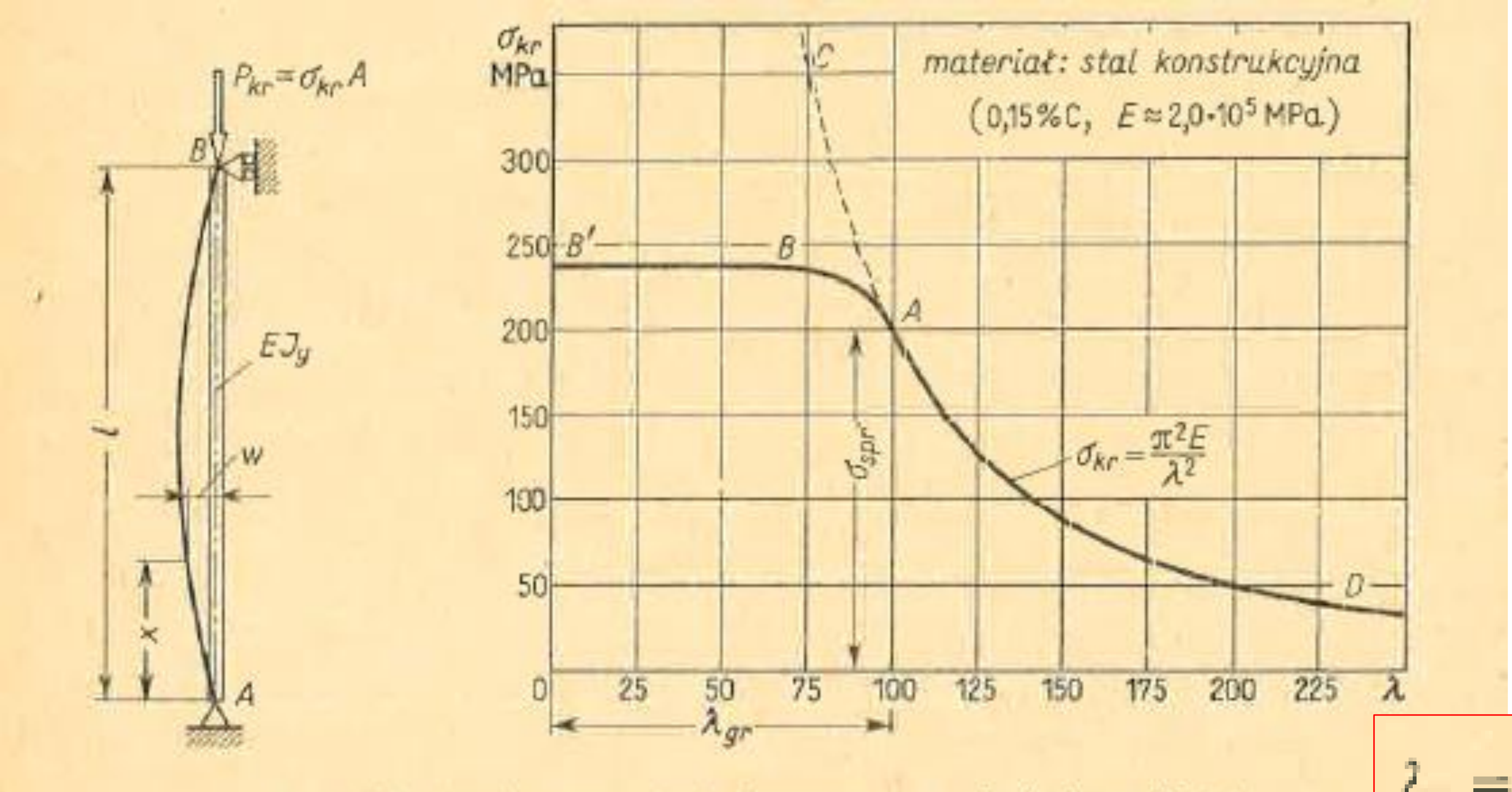


Rys. 6.23. Typowy wykres $\sigma_{kr}(\lambda)$ dla materiału bez wyraźnej granicy plastyczności

$$P_{dop} = \frac{P_{kr}}{n_{kr}}$$

$$\lambda_0 = \pi\sqrt{2E/R_{0,2}}\,, \qquad (\sigma_{kr})_A = R_{0,2}/2\,.$$

Dla materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności



Rys. 6.22. Analiza naprężenia krytycznego w funkcji smukłości

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{E/\sigma_{prop}}\,,$$